УДК 519.161

А.В. Морозов
Житомирский государственный технологический университет, Украина
Украина, 10005, г. Житомир, ул. Черняховского, 103

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ПОСТРОЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ МАРШРУТОВ НА ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

A.V. Morozov
Zhytomyr State Technological University, Ukraine
Ukraine, 10005, c. Zhytomyr, Chernyakhovsky str., 103

MATHEMATICAL MODELS OF PROBLEMS OF BUILDING CLOSED ROUTES ON THE TRANSPORT NETWORK

А.В. Морозов
Житомирський державний технологічний університет, Україна
Україна, 10005, м. Житомир, вул. Черняхівського, 103

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ПОБУДОВИ ЗАМКНЕНИХ МАРШРУТІВ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

В статье предлагается классификация фундаментальных задач построения замкнутых маршрутов на полных и неполных графах. Рассматриваются обобщения и частные случаи задачи коммивояжера и задачи о почтальоне. Анализируются связи между задачами и формулируются их математические модели.
Ключевые слова: транспортная сеть, задача маршрутизации, задача коммивояжера, задача о почтальоне.

The paper proposes a classification of the fundamental tasks of building closed routes to complete and incomplete graphs. Generalizations and special cases of the traveling salesman problem and the problem of the postman are discussed. Links between tasks and formulate their mathematical models are analyzed.
Key words: transport network, routing problem, traveling salesman problem, postman problem.

У статті пропонується класифікація фундаментальних задач побудови замкнених маршрутів на повних і неповних графах. Розглядаються узагальнення і окремі випадки задачі комівояжера і задач про листоношу. Аналізуються зв'язки між задачами і формулюються їхні математичні моделі.
Ключові слова: транспортна мережа, задача маршрутизації, задача комівояжера, задача про листоношу.

Введение

Многочисленные задачи, известные как задачи маршрутизации, характеризуются постоянно пополняющимся перечнем практических приложений, занимая традиционно важное место в исследовании проблем комбинаторной оптимизации. Задача маршрутизации в широком смысле является задачей текущего планирования, в процессе которого выбираются перемещаемые объекты и определяются траектории и расписания их движения.

В условиях каждой задачи маршрутизации содержится описание сети коммуникаций, определяющей множество возможных путей следования к цели одного или нескольких движущихся объектов. Как правило, структурные параметры сети остаются неизменными от начала и до окончания процесса решения задачи.

Задачи маршрутизации на автомобильном транспорте и методы их решения изучаются в рамках научного направления – транспортной логистики, математический аппарат которой представлен теорией графов и исследованием операций. В

обзоре [1] перечислены 16 признаков, классифицирующих детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики. Каждая задача маршрутизации характеризуется тремя основополагающими факторами: транспортной сетью, стоимостью перевозки и определенностью. Описание транспортной сети содержит один или несколько параметров (расстояние, пропускную способность, ограничение на скорость и др.). Стоимость перевозки может зависеть как от протяженности, так и от загрузки транспортного средства (ТС). Определенность означает, что сформулированные в задаче условия перемещения заказов не изменяются в процессе ее решения. Такие задачи маршрутизации называются статическими. Задачи с неопределенными расплывчатыми условиями решения относятся к классу динамических задач транспортной логистики [1]. В данной статье ограничимся статическими задачами. Кроме трех перечисленных признаков классификации, задача маршрутизации имеет определенный набор других свойств, дополняющих условия перевозки: характеристику пунктов производства и потребления, баз ТС, вид груза, ограничения на вместимость ТС и другие ограничения, присущие реальному транспортному процессу.

Целевая функция задачи класса маршрутизации носит экономический смысл. Как правило, целью решения задачи является минимизация стоимостных или временных затрат на перевозки грузов или пассажиров.

Условия реального транспортного процесса, представленные системой ограничений задачи, существенно усложняют построение ее точного решения. В подавляющем большинстве задачи маршрутизации *NP*-полны [2].

Классическая задача маршрутизации

Первой задачей транспортной логистики принято считать классическую задачу маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem), поставленную Данцигом и Рамсером [1]. Она состоит в том, что каждому потребителю i, $i=\overline{1,n}$, должен быть доставлен однородный груз в требуемом количестве d_i с единственной базы $n+1$ при использовании K ТС одинаковой вместимости S. Предполагается, что груз потребителю i доставляется только одним ТС, которое возвращается на базу. Стоимость d_{ij} перевозки из пункта i в пункт j, $i, j \in N \cup \{n+1\}$, $|N| = n$, не зависит от объема (веса) груза, и $d_{ij} = d_{ji}$. Допустимым решением VRP является множество N из K перестановок σ_k, определяющих последовательности доставки грузов потребителям и удовлетворяющих ограничению вместимости ТС: $\sum_{i\in\sigma_k} d_i \le S$. Для нахождения оптимального решения VRP требуется найти минимум $\sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j\in\sigma_k} d_{ij}$.

Ограничения, определяющие искомое разбиение, формируют полный граф с $n+1$ вершинами, соответствующими пунктам потребления и базе, и ребрами с весами, равными d_{ij}. Полный неориентированный взвешенный граф является математической моделью транспортной сети в VRP.

Одним из наиболее распространенных подходов к изучению сложных взаимосвязанных процессов перемещения материальных потоков и передачи информации является построение математических моделей, отображающих конструкцию и условия функционирования коммуникационных сетей. Основу

моделирования таких процессов образует базовая сеть, узлам которой ставятся в соответствие вершины связного графа, а коммуникациям – ребра. Каждое ребро характеризуется одним или несколькими числовыми параметрами: расстоянием, стоимостью, пропускной способностью и т.д. Узлами могут быть самые разнообразные объекты: истоки и стоки трубопроводной сети, отделения связи в черте города, населенные пункты района или области. В общем случае каждому узлу ставится в соответствие числовая характеристика, устанавливающая степень его влияния на процессы, протекающие в сети. К коммуникационным сетям относятся транспортные и газораспределительные сети, нефте- и водопроводы, сети энергоснабжения, цифровые сети связи [3].

Назовем базовой моделью транспортной сети в задаче маршрутизации взвешенный граф $H=(V, U)$ с множеством вершин V и множеством ребер U. Вершина $i \in V$, $|V|=n$, может соответствовать потребителю груза, населенному пункту области или района, перекрестку дорог города и т.д. Вершины i и j образуют в графе $H=(V, U)$ ребро $\{i, j\}$, если они представлены населенными пунктами, непосредственно связанными отрезками трассы, соседними перекрестками улиц на карте города и т.д. Граф H не содержит петель, т.е. ребер $\{i, i\}$. Каждому ребру $\{i, j\}$ приписан вес $d_{ij} \in R_0^+$, равный расстоянию или стоимости передвижения из i в j, $d_{ij}=d_{ji}$, $i, j=\overline{1,n}$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,n}$, R_0^+ – множество действительных неотрицательных чисел.

Если в условиях задачи маршрутизации указаны стоимости перемещения d_{ij} и d_{ji} между пунктами i и j, то возможно, что не для всех пар $\{i, j\} \in U$ $d_{ij}=d_{ji}$. В этом случае транспортную сеть удобно представить взвешенным орграфом $G=(V, E)$, в котором любые две вершины i и j, $\{i, j\} \in U$, соединены парой дуг $(i, j) \in E$ и $(j, i) \in E$. Для участка $\{i, j\}$ дорожного полотна с односторонним движением от i и j (от j к i) можно положить $d_{ji}=\infty \left(d_{ij}=\infty\right)$, т.е. удалить из E дугу (i, j) $\left(\text{дугу } (j, i)\right)$. Транспортная сеть, в которой все пункты связаны дорожными участками с односторонним движением, моделируется орграфом (V, A), где A – множество дуг, таких, что если $(i, j) \in A$, то $(j, i) \notin A$, и если $(j, i) \in A$, то $(i, j) \notin A$. В тех случаях, когда для некоторых пар дуг (i, j) и (j, i), $d_{ij}=d_{ji} \neq \infty$, ряд задач маршрутизации решается на транспортной сети, представленной смешанным графом (V, B, F), где B – множество дуг, а F – множество ребер $\{i, j\}$. Каждое ребро $\{i, j\}$ соответствует в орграфе $G=(V, E)$ паре дуг (i, j) и (j, i) равной стоимости.

Даже в таком простейшем представлении транспортной сети, как базовая модель, раскрывается разнообразие характеристик, свойственных реальному движению материальных потоков, и выдвигается целый ряд оптимизационных задач маршрутизации. Среди них важное место занимают задачи нахождения незамкнутых маршрутов, удовлетворяющих определенным ограничениям. Такие задачи естественным образом сводятся к задаче построения в сети соответствующих цепей из заданной вершины s в фиксированную вершину t или во все достижимые из s.

Задача коммивояжера

Пусть в условиях VRP $K = 1$, т.е. n потребителей обслуживает одно ТС и $\sum_{i=1}^{n} d_i \le S$. В таком случае VRP формулируется как задача коммивояжера (ЗК): требуется построить цикл, который проходит по всем $n+1$ вершинам сети, представленной полным графом, точно один раз и на котором достигается минимум транспортных затрат.

ЗК – одна из основополагающих NP-полных задач комбинаторной оптимизации, связанная с целым рядом важных, не всегда очевидных практических приложений. В совокупности со своими многочисленными частными случаями, вариантами и обобщениями она образуют класс задач проблемы коммивояжера. Проблема коммивояжера – это непрерывно расширяющаяся область оптимизационных дискретных задач, каждая из которых преобразуется в следующую задачу: для матрицы $\left[d_{ij}\right]_n$, где $d_{ij} \in R_0^+$, $i \ne j$, $d_{ii} = \infty$, $i = \overline{1, n}$, найти такую перестановку $\tau^* = \left(\tau^*[1], \quad \tau^*[2], \ldots, \tau^*[n]\right)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что сумма $d_{\tau^*[1]\tau^*[2]} + d_{\tau^*[2]\tau^*[3]} + \ +\ldots + d_{\tau^*[n-1]\tau^*[n]} + d_{\tau^*[n]\tau^*[1]}$ имеет минимальное значение. Перестановка τ^* называется оптимальным обходом, а последовательность $\tau^* = \left(\tau^*[1], \ \tau^*[2], \ \ldots, \ \tau^*[n], \ \tau^*[1]\right)$ – оптимальным маршрутом (гамильтоновым циклом минимальной стоимости полного взвешенного графа $H_n = (V, E_n)$).

Другими словами в ЗК требуется найти циклическую перестановку τ^* номеров столбцов матрицы стоимости $\left[d_{ij}\right]_n$ с действительными неотрицательными числами d_{ij}, $i \ne j$, $d_{ii} = \infty$, $i = \overline{1, n}$, минимизирующую целевой функционал

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{\tau[i]}, \qquad (1)$$

здесь $\tau = \left(\tau[1], \tau[2], \ldots, \tau[n]\right)$ – циклическая перестановка или обход, которому соответствует маршрут коммивояжера $\left(\tau[1], \tau[2], \ldots, \tau[n], \tau[1]\right)$, где номера $\tau[1], \tau[2], \ldots, \tau[n]$ из множества $(1, 2, \ldots, n)$ пунктов или городов различны. Величину $D(\tau)$ называют стоимостью обхода [4].

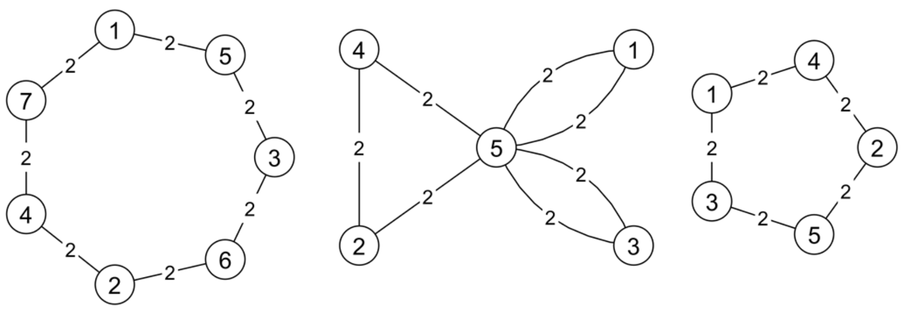
В ЗК преобразуются широко известные задачи маршрутизации. Например, если предположить, что в VRP $\sum_{i=1}^{n} d_i \le S$ и K произвольное, то любое ТС может обслужить любое количество пунктов потребления. В этом случае задача всегда разрешима и состоит в построении K простых циклов с общей вершиной $n + 1$, которые в совокупности содержат все вершины полного графа и доставляют минимум транспортных затрат. Искомые циклы определяются добавлением к графу $(K-1)$ копий вершины $n + 1$ с номерами $n + 2, n + 3, \ldots, n + K$ и построением сети с матрицей стоимостей $\left[d'_{ij}\right]_{n+K}$, где

$d'_{ij} = d_{ij}$, $i, j = \overline{1, n+1}$; $d'_{i,n+j} = d_{i,n+1}$, $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{2, K}$;

$d'_{i,n+j} = \infty$, $i = \overline{n+2, n+K}$, $j = \overline{1, K}$, $d'_{n+i,j} = d_{n+i,j}$, $i = \overline{2, K}$, $j = \overline{1, n}$.

В построенной сети все K базовых вершин несмежные, и существует гамильтонов цикл, поскольку исходный граф полный. В результате решения ЗК для матрицы $\left[d_{ij}\right]_{n+K}$ получим оптимальный маршрут, из которого определяются K простых циклов «слиянием» всех вершин с номерами, большими n в одну вершину с номером $n + 1$. Рассмотренная задача известна как множественная ЗК [1].

Множественная ЗК разрешима при любом $K = \overline{1,n}$, поскольку ТС способно обслужить все n пунктов потребления. В ее оптимальном решении, полученном для $K = 1$, содержится наименьшее число ребер, равное числу ребер гамильтонова цикла в полном графе с $n+1$ вершинами. С увеличением числа ТС увеличивается число взвешенных ребер в семействе простых циклов с общей вершиной $n + 1$, образующих искомое решение. Очевидно, множественная ЗК теряет экономический смысл, если минимум транспортных затрат при $K > 1$ больше, чем при $K = 1$. Приведенные соображения позволяют сформулировать новую, более общую версию множественной ЗК: определить количество ТС K_{opt}, доставляющих минимальную стоимость перевозки грузов n потребителям при всех ограничениях VRP, кроме ограничения на вместимость. По-видимому, поиск K_{opt} следует начинать с изучения свойств исходной матрицы стоимостей $\left[d_{ij}\right]_{n+1}$.



а) б) в)

Рис. 1. а) гамильтонов цикл минимальной стоимости в ЗК с матрицей $\left[d'_{ij}\right]_7$;

б) решение множественной ЗК; в) решение ЗК для матрицы $\left[d_{ij}\right]_5$

Транспортной сети, моделируемой полным графом $H_n = (V, E_n)$, $|V| = n$, с неотрицательными весами d_{ij} ребер $\{i, j\} \in E_n$, соответствует симметричная матрица стоимостей $\left[d_{ij}\right]_n$, т.е. матрица, в которой $d_{ij} = d_{ji}$. ЗК называется симметричной ЗК (СЗК), если симметрична ее матрица стоимостей. ЗК является метрической (МЗК), если она ограничена на симметричные матрицы $\left[d_{ij}\right]_n$, удовлетворяющие неравенству треугольника:

$$d_{ij} \le d_{ik} + d_{kj},\ i \ne j,\ i, j, k = \overline{1,\ n}. \qquad (2)$$

Алгоритмические свойства *NP*-полной задачи класса коммивояжера, порожденные метрикой (2), служат стимулом для построения эффективных приближенных алгоритмов ее решения с гарантированными оценками погрешности. Чем меньше оценка погрешности, асимптотически стремящаяся к константе с ростом объема данных на входе алгоритма, тем точнее алгоритм [2].

В отличие от СЗК и МЗК в ЗК (TSP – Travelling Salesman Problem) матрица стоимости $\left[d_{ij}\right]_n$ не ограничена ни на симметричные матрицы, ни на матрицы, элементы которой связаны неравенством (2) [4].

ЗК называется замкнутой, если искомый маршрут является гамильтоновым циклом. В незамкнутой ЗК он представлен простой цепью из n вершин графа $H_n = (V, E_n)$, $|V| = n$, называемой гамильтоновой цепью.

Гамильтонова и общая задачи коммивояжера

Задача нахождения обхода минимальной стоимости в транспортной сети, задаваемой остовным подграфом $H = (V, U)$ полного взвешенного графа $H_n = (V, E_n)$, не всегда разрешима, т.е. не в каждом графе существует гамильтонов цикл. Граф, содержащий такой цикл, называется гамильтоновым. Гамильтонов цикл взвешенного графа $H = (V, U)$ с наименьшей суммой весов ребер является решением гамильтоновой задачи коммивояжера (ГЗК) [5].

Вход ГЗК представлен симметричной матрицей стоимости $\left[d_{ij}\right]_n$, взаимно соответствующей графу $H = (V, U)$ с множеством V из n вершин, занумерованных числами 1, 2, …, n, и множеством U взвешенных ребер $\{i, j\}$. В матрице $\left[d_{ij}\right]_n$ элемент $d_{ij} \in R_0^+$, $i \neq j$, если $\{i, j\} \in U$, и $d_{ij} = \infty$ иначе, $d_{ii} = \infty$, $i = \overline{1, n}$.

ГЗК не менее привлекательна разнообразием практических приложений, чем ЗК, СЗК и МЗК. Востребованность ее решения не ограничивается вопросами транспортной логистики. ГЗК и связанные с ней задачи все чаще находят применение в области современных компьютерных технологий, например, в решении проблемы эффективной организации обработки информации в распределенных вычислительных системах (ВС).

ВС – это множество элементарных машин (ЭМ), связанных сетью, программно управляемой из этих машин [6]. Каждая ЭМ состоит из вычислительного модуля (ВМ) и системного устройства – маршрутизатора сообщений, функционирующего под управлением ВМ. Входные и выходные полюса маршрутизатора ЭМ служат для связи с выходными и входными полюсами соседних ЭМ. Структурой ВС является граф $H_s = (V_s, E_s)$ межмашинных соединений, где V_s – множество ЭМ, E_s – множество связей между ними.

Наибольшая эффективность информационных взаимодействий в современных ВС достигается при использовании структур в виде регулярных графов, т.е. графов, в которых все вершины имеют одинаковую степень: гиперкуб, двумерный тор (2*D*-тор), трехмерный тор (3*D*-тор). Граф, известный как m-мерный булевский куб с числом вершин 2^m, описывает гиперкубическую структуру, а m-мерные евклидовы решетки с замкнутыми границами – тороидальные структуры: 2*D*-тор ($m = 2$) (рис. 2, а) и 3*D*-тор ($m = 3$) [7].

К основным функциям распределенных ВС относится выполнение параллельных программ. Граф параллельной программы $H_p = (V_p, E_p)$ определяется как множество виртуальных ЭМ, передающих сообщения по логическим (виртуальным) каналам одно- и двунаправленного множества $E_p \subseteq V_p \times V_p$.

Обычно параллельная прикладная программа отображает упорядоченную во времени и регулярную в пространстве схему взаимодействия между модулями ЭМ в виде «линейки», «кольца», «решетки» и др. [6]. Вложение кольцевой структуры параллельной программы в структуру распределенной ВС при $|V_p| = |V_s|$ сводится к построению гамильтонова цикла в графе $H_s = (V_s, E_s)$ с единичными расстояниями между каждой парой соседних вершин (рис. 2, б).

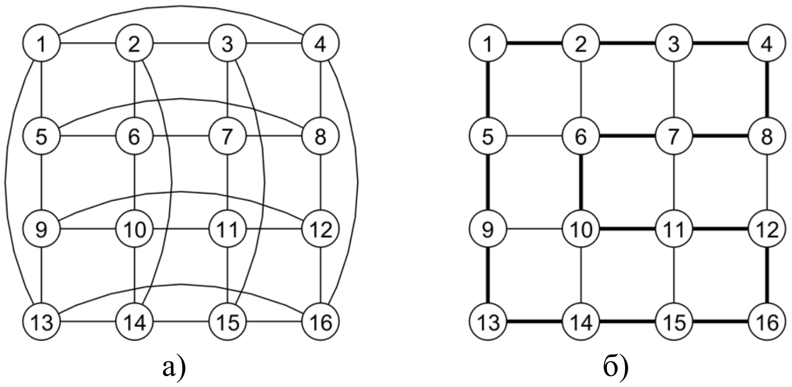


Рис. 2 . а) пример 2D-тора; б) гамильтонов цикл на 2D-решетке

Очевидно, каждая рассмотренная задача не имеет решения, если граф, на котором она ищется, не связан. Граф связан, когда любая пара его вершин соединена простой цепью.

В тех случаях, когда транспортная сеть описывается негамильтоновым графом $H = (V, U)$, на практике возникает необходимость в построении кратчайшего замкнутого маршрута, проходящего все пункты $i \in V$ и посещающего некоторые из них более одного раза. Назовем общей задачей коммивояжера (ОЗК) задачу построения в связном графе $H = (V, U)$ с неотрицательными действительными весами ребер $\{i, j\} \in V$ кратчайшего замкнутого маршрута, соединяющего все вершины $i \in V$ [66].

Традиционным объектом приложений ОЗК является транспортная сеть, на которой ищется замкнутый маршрут в соответствии с выбранным критерием оптимальности [8].

Если сеть описывается остовным связным подграфом H полного графа H_{n+1} с $n+1$ вершинами, то множественная ЗК сводится к ГЗК. Она не имеет решения, когда граф H негамильтонов, и всегда разрешима при условии, что в искомой системе маршрутов по небазовому пункту могут проходить несколько ТС или любое ТС может посещать небазовый пункт более одного раза. В этом случае решение множественной ЗК находится сведением ее к ОЗК и включает следующие действия.

1. По исходной матрице стоимостей $\left[d_{ij}\right]_{n+1}$, в которой $d_{ij} = \infty$, $i \neq j$, для вершин i и j, не связанных ребром в H, находятся матрицы $\left[\alpha_{ij}\right]_{n+1}$ и $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)_{n+1}\right]$, где α_{ij} – кратчайшая цепь между i и j, а $D\left(\alpha_{ij}\right)$ – стоимость этой цепи. Поскольку граф H связен, $D\left(\alpha_{ij}\right) \neq \infty$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n+1}$.

2. Из матрицы $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)_{n+1}\right]$, формируется матрица $\left[D'\left(\alpha_{ij}\right)_{n+K}\right]$ точно так же, как

из матрицы $\left[d_{ij}\right]_{n+1}$ для множественной ЗК на сети, описываемой полным графом H_{n+1}, матрица $\left[d'_{ij}\right]_{n+K}$.

3. В результате решения ЗК для сформированной матрицы $\left[D'\left(\alpha_{ij}\right)_{n+K}\right]$ находятся K замкнутых маршрутов с общей вершиной $n+1$.

4. Каждое ребро $\{i, j\}$ маршрута l, $l=\overline{1, K}$, заменяется на кратчайшую цепь α_{ij} между вершинами i и j в графе H, $i \neq j$, $i, j=\overline{1, n}$.

Построенная система маршрутов представляет собой решение ОЗК, включающее циклы с общими вершинами из множества небазовых вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ в сети, заданной негамильтоновым графом H.

Задачи типа почтальона

Из описания базовой модели транспортной сети следуют различные постановки практически важных задач построения маршрутов, удовлетворяющих заданным ограничениям и оптимальных в смысле определенного критерия. Одним из ограничений, существенно усложняющим решение этих задач, является требование замкнутости маршрутов, выдвигаемое в тех случаях, когда ТС начинает и заканчивает перемещение в одном пункте [9]. Другое ограничение состоит в том, что замкнутый маршрут движения ТС должен включать заданные пункты и участки транспортной сети. И, наконец, требуется, чтобы замкнутый маршрут проходил каждый указанный участок и каждый указанный пункт точно один раз.

Замкнутый маршрут, проходящий по каждому указанному участку и пункту сети в точности один раз, а по любому из оставшихся пунктов не более одного раза, назовем кольцевым [10]. Будем считать оптимальным маршрутом тот, который имеет минимальную стоимость (протяженность) среди всех кольцевых маршрутов сети.

Перечисленные ограничения приводят к формулировкам новых оптимизационных задач, образующих класс задач выбора кольцевых маршрутов. Постановки задач этого класса вытекают из следующего уточненного описания базовой модели транспортной сети.

На связном взвешенном графе $H = (V, U)$, задано подмножество вершин $N \subseteq V$ и подмножество ребер R, которое образует совокупность цепей. Совокупность цепей включает подмножество вершин $V(R) \subseteq V$, не пересекающихся с подмножеством N.

Требуется найти в графе $H = (V, U)$, цикл, включающий все вершины из N и все ребра из R и имеющий минимальную сумму весов входящих в него ребер. Очевидно, если этот цикл простой, то он является оптимальным кольцевым маршрутом на транспортной сети (рис. 3).

Варьируя исходной информацией представленной модели, легко получить формулировку известных и новых задач маршрутизации.

При $R=\varnothing$, $N=V$ для транспортной сети, заданной полным графом H_n, имеем ЗК с симметричной матрицей стоимостей $\left[d_{ij}\right]_n$, т.е. СЗК.

Пусть $R=U$, $N=\varnothing$, а замкнутый маршрут, если он существует в графе $H=(V, U)$, проходит каждое ребро $\{i, j\}$ из U ровно один раз и, следовательно, имеет стоимость $\sum_{\{i, j\} \in U} d_{ij}$. Такой маршрут называется эйлеровым, а

содержащий его граф – эйлеровым графом. Граф $H=(V,\,U)$ эйлеров, если и только если H связен и все вершины в V имеют четную степень. На построение эйлерового цикла в эйлеровом графе $H=(V,\,U)$ достаточно $O(|V|)$ элементарных операций [4].

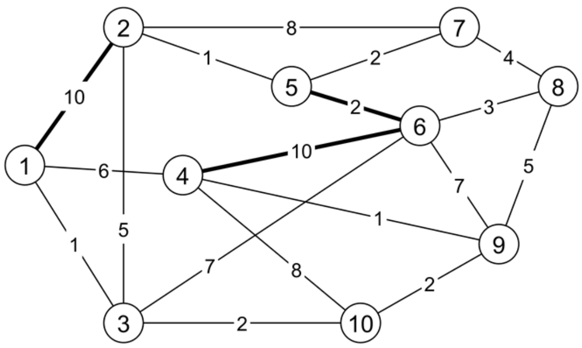


Рис. 3. Транспортная сеть, где $N=\{3,\,9\}$,
$R=\{\{1,\,2\},\ \{6,\,5\},\{4,\,6\}\},\ V(R)=\{1,\,2,\,4,\,5,\,6\}$;
(1, 2, 5, 6, 4, 9, 10, 3, 1) – оптимальный кольцевой маршрут

Необходимость построения замкнутых маршрутов, проходящих по всем участкам транспортной сети, которой соответствует связный граф H с нечетными и четными степенями вершин, вызывает решение известной задачи о китайском почтальоне (ЗКП). В ЗКП замкнутый маршрут минимальной стоимости проходит часть ребер графа более одного раза. Любой связный граф содержит маршрут китайского почтальона [8].

Положим, $R\subset U$, $N=\varnothing$. Задача построения в связном взвешенном графе $H=(V,\,U)$ замкнутого маршрута минимальной стоимости, включающего все ребра заданного подмножества R множества U, называется задачей о сельском почтальоне (ЗСП) [8]. Очевидно, ЗСП всегда разрешима. Если в ЗСП потребовать, чтобы маршрут был кольцевым, то получим кольцевую задачу о сельском почтальоне (КЗСП).

При $R\subset U$ и $N\cup V(R)=V$ кольцевой маршрут является гамильтоновым циклом связного графа $H=(V,\,U)$. Задачу нахождения в связном графе $H=(V,\,U)$ гамильтонового цикла минимальной стоимости, включающего фиксированное множество ребер R, назовем гамильтоновой задачей о сельском почтальоне (ГЗСП).

Из рассмотренной ситуации вытекает, по крайней мере, три вопроса.

Если транспортная сеть представлена связным графом $H=(V,U)$, то существуют ли в ней кольцевые маршруты $y(R)$, содержащие все участки R, которые подлежат ремонту? При этом ТС, следующее по маршруту $y(R)$, возвращается на базу $v\in y(R)$, посещая каждый участок из R точно один раз, а каждый перекресток $w\in V$ не более одного раза.

Если в сети нет кольцевых маршрутов $y(R)$, то содержит ли она замкнутые маршруты, допускающие неоднократное прохождение перекрестков или указанных участков? (рис. 4, а, б).

Если в сети не содержится замкнутых маршрутов, по которым каждый выделенный участок можно пройти только один раз, то существует ли в ней простой

путь, начинающийся в базе и включающий все отрезки дорожного полотна, требующие ремонта? (рис 4, в).

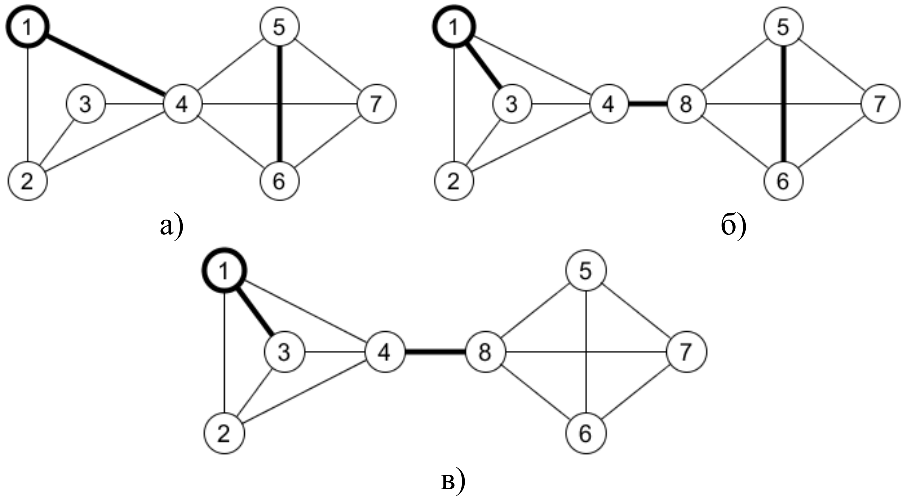


Рис. 4. а) сеть с базой 1, в которой замкнутый маршрут (1, 4, 5, 6, 4, 1) дважды проходит узел 4 $\in$ V (R); б) маршрут (1, 3, 4, 8, 5, 6, 8, 4, 1) дважды проходит по участку $\{4,\ 8\} \in R$; в) (1, 3, 4, 8) – простой путь, включающий все выделенные участки

При утвердительном ответе на каждый поставленный вопрос нужно построить оптимальный маршрут ТС.

Те же вопросы адресуются к случаю, когда база, с которой поставляются материальные ресурсы, находится в пункте, связывающем участки сети, не нуждающиеся в ремонтно-восстановительных работах, т.е. когда $v \notin V(R)$, $R \subset U$.

КЗСП и ГЗСП можно рассматривать как задачи оптимального проектирования кольцевых маршрутов городского общественного транспорта, включающего троллейбусные, автобусные и трамвайные маршруты. Исходными данными для решения КЗСП и ГЗСП являются результаты обследования пассажиропотоков, позволяющие выявить транспортные потребности населения на основе анализа его повседневного передвижения и связей между городскими микрорайонами и районами. Конечная цель обследования заключается в определении «узких мест» улично-дорожной сети – участков, на которые приходятся наибольшие объемы пассажиропотоков. Каждый такой участок должен быть обязательно включен в проектируемый кольцевой маршрут. Решение КЗСП востребовано, если к проектируемому кольцевому маршруту не выдвинуто никаких других условий, кроме прохождения ТС по всем «узким местам». Очевидно, ГЗСП – это КЗСП с дополнительным требованием – требованием остановки для посадки и высадки пассажиров возле каждой развязки городской транспортной сети или в каждом населенном пункте на развязке дорог области или района.

Эти же задачи стоят перед выполнением маршрутов развозки корреспонденции, уборки, патрулирования улиц района и многих видов курьерских заданий [8].

В классе задач оптимизации замкнутых маршрутов, схематически представленном на рис. 5, КЗСП и ГЗСП занимает ключевые позиции. В них содержатся практически все алгоритмические особенности графовых задач,

получивших статус труднорешаемых. Поэтому появление методов поиска решений КЗСП и ГЗСП позволило бы рассматривать их как вычислительную схему, включающую все основные подходы к построению оптимальных замкнутых маршрутов. Иначе говоря, речь идет о возможности замены алгоритмов решения известных задач маршрутизации более общими методами. Такие методы должны корректно выполнять поиск как поставленной задачи, так и ее вариантов, определяемых в основном структурными характеристиками графа и описанием параметров *R* и *N*.

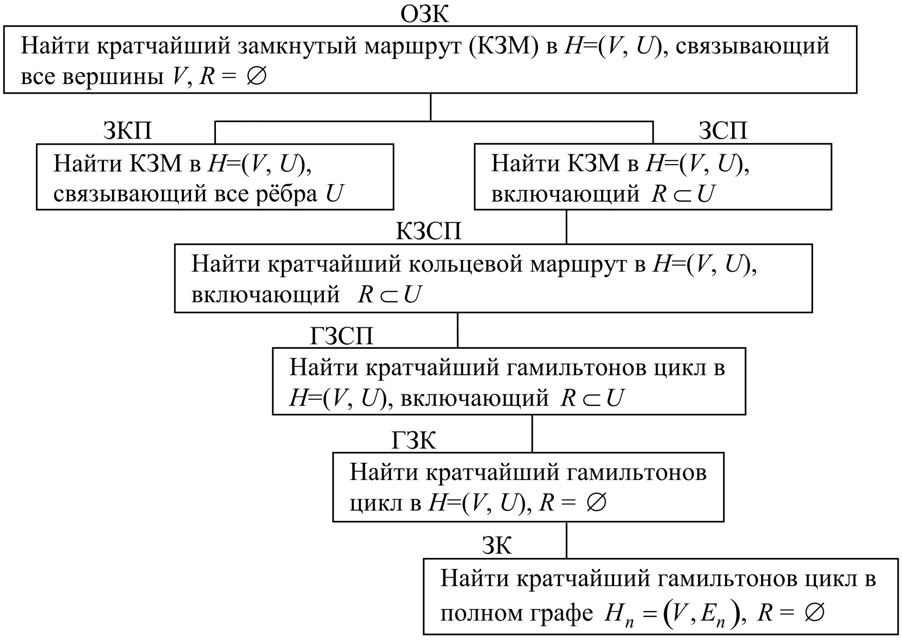


Рис. 5. Список основных задач оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети; ОЗК – общая задача коммивояжера; ЗКП – задача о китайском почтальоне; ЗСП – задача о сельском почтальоне; КЗСП – кольцевая задача о сельском почтальоне; ГЗСП – гамильтонова задача о сельском почтальоне; ГЗК – гамильтонова задача коммивояжера; ЗК – задача коммивояжера

Заключение

В статье очерчена область известных и новых комбинаторных задач оптимизации, содержательные постановки которых мотивированы многочисленными приложениями ЗК. Основное внимание уделено задачам оптимизации замкнутых маршрутов на транспортных сетях, образующим логистическую базу процесса перевозок. Многие из них, такие как VRP, сводятся к ЗК.

ОЗК сформулирована в [8]. В ней требуется найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий по всем вершинам, как в гамильтоновом, так и в негамильтоновом взвешенном графах. В [8] предложен подход к решению ОЗК. Он ограничен доказательством того, что решение ОЗК можно свести к решению

«гамильтоновой» задачи, полученной преобразованием исходного графа в граф, веса ребер которого удовлетворяют неравенству треугольника.

Условия КЗСП и ГЗСП пересекаются с условиями ОЗК и ЗСП, а их решения применимы в планировании кольцевых маршрутов пассажирских и грузовых перевозок. Разумеется, список задач, представленный на рис. 5, открыт для новых задач маршрутизации, выдвигаемых реальными условиями транспортного процесса и особенностями транспортной сети.

Литература

1. Бронштейн Е. М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.
2. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
3. Меламед И. И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–33.
4. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
5. Вьялицин А. А. О перечислении гамильтоновых циклов / А. А. Вьялицин // Дискретная математика. – 1991. – Т. 3, вып. 3. – С. 46–49.
6. Забиняко Г. И. Организация параллельных вычислений в некоторых задачах дискретной оптимизации / Г. И. Забиняко, Е. А. Котельников // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 414–422.
7. Орлович Ю. Л. Гамильтоновы циклы в графах триангулированной решетки / Ю. Л. Орлович, В. С. Гордон, Ф. Вернер // Доклады Национальной академии наук Белоруссии. – 2005. – Т. 49, № 5. – С. 21–25.
8. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника – М.: Мир, 1981. – 323 с.
9. Панов С. А. Модели маршрутизации на автомобильном транспорте / С. А. Панов. – М.: Транспорт, 1974. – 152 с.
10. Морозов А. В. Метод гілок та меж у гамільтоновій задачі про сільського листоношу / А. В. Морозов, А. В. Панішев // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – №2. − С. 57−66.

Literatura

1. Bronshtein E. M/ Deterministic optimization problems of transport logistics / E. M Bronshtein, T. A Zayko // Automation and Remote Control. – 2010. – №10. – P. 133–147.
2. Gary M. Computers and Intractability / M. Gary, D. Johnson. – M .: Mir, 1982. – 416 p.
3. Melamed I. I. Traveling Salesman Problem. Problems in the theory / I. I. Melamed, S. I. Sergeev, I. H. Sigal // Automation and Remote Control. – 1989. – № 9. – P. 3–33.
4. Papadimitriou H. Combinatorial optimization. Algorithms and Complexity / H. Papadimitriou, K. Stayglits. – M.: Mir, 1985. – 510 p.
5. Vyalitsin A. A Enumeration of Hamiltonian cycles / A. A Vyalitsin // Discrete mathematics. – 1991. – Volume 3, No. 3. – P. 46–49.
6. Zabinyako G. I Organization of parallel calculations in some problems of discrete optimization / G. I. Zabinyako, E. A. Kotelnikov // Siberian Journal of Computational Mathematics. – 2008. – V. 11, № 4. – P. 414–422.
7. Orlovich Y. L. Hamiltonian cycles in graphs triangulated lattice / Y. L. Orlovich, V. S. Gordon, F. Werner // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2005. – V. 49, № 5. – P. 21–25.
8. Maynika E. Optimization algorithms on networks and graphs / E. Maynika – M .: Mir, 1981. – 323 p.
9. Panov S. A. Models routing in road transport / S. A. Panov. – M .: Transport, 1974. – 152 p.
10. Morozov A. V. Branch and bound method in the Hamiltonian Rural Postman Problem / A. V. Morozov, A. V. Panishev // System Research and Information Technologies. – 2012. – №2. – P. 57–66.

RESUME

A.V. Morozov

Mathematical models of problems of building closed routes on the transport network

The article outlined area of known and new combinatorial optimization problems, meaningful formulation that motivated numerous applications of Travelling Salesman Problem (TSP). The focus is on optimization problems of closed routes on transport networks, forming the logistic base of transportation. Many of them, such as the VRP (Vehicle Routing Problem), boil down to TSP. GTSP (Generalized TSP) stated in [8]. It is necessary to find the shortest closed path that passes through all the vertices as in the Hamiltonian and non-Hamiltonian in a weighted graph. In [8] approach to the solution of the GTSP is provided. It is limited evidence that the decision of the GTSP can be reduced to solving the "Hamiltonian" problems obtained by converting the original graph into a graph, the weight of the edges of which satisfy the triangle inequality.

Conditions of Cyclic Rural Postman Problem (CRPP) and Hamiltonian Rural Postman Problem (HRPP) intersect with the terms of UGC and ESP, and their solutions are applicable in the planning circular routes for passenger and freight traffic. Of course, the task list, shown in Fig. 5 is open to new routing problems put forward by the actual conditions of the transport process and the characteristics of the transport network.

А.В. Морозов

Математические модели задач построения замкнутых маршрутов на транспортной сети

В статье очерчена область известных и новых комбинаторных задач оптимизации, содержательные постановки которых мотивированы многочисленными приложениями ЗК. Основное внимание уделено задачам оптимизации замкнутых маршрутов на транспортных сетях, образующим логистическую базу процесса перевозок. Многие из них, такие как VRP, сводятся к ЗК.

ОЗК сформулирована в [8]. В ней требуется найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий по всем вершинам, как в гамильтоновом, так и в негамильтоновом взвешенном графе. В [8] предложен подход к решению ОЗК. Он ограничен доказательством того, что решение ОЗК можно свести к решению «гамильтоновой» задачи, полученной преобразованием исходного графа в граф, веса ребер которого удовлетворяют неравенству треугольника.

Условия КЗСП и ГЗСП пересекаются с условиями ОЗК и ЗСП, а их решения применимы в планировании кольцевых маршрутов пассажирских и грузовых перевозок. Разумеется, список задач, представленный на рис. 5, открыт для новых задач маршрутизации, выдвигаемых реальными условиями транспортного процесса и особенностями транспортной сети.

Поступила в редакцію 03.09.2015